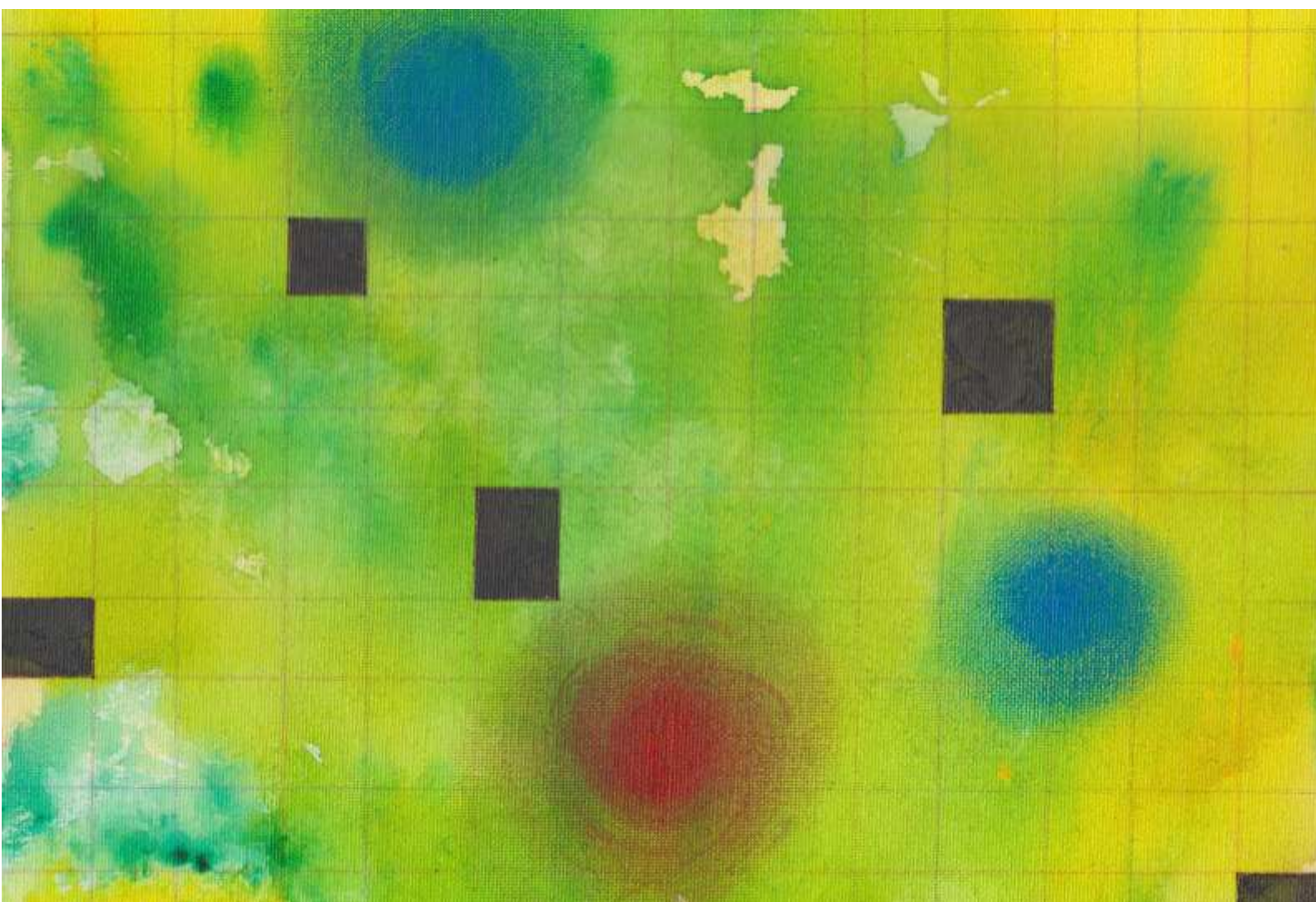


VIKTORS AJEVSKIS

PĒTĪJUMS
4 / 2019

**VISPĀRINĀTA IMPULSA REAKCIJAS FUNKCIJA KĀ DSGE
MODEĻU GLOBĀLA ATRISINĀJUMA PERTURBĀCIJA**



SATURS

KOPSAVILKUMS	3
1. IEVADS	4
2. MODELIS	5
3. RACIONĀLO GAIDU MODEĻA AR LAIKĀ MAINĪGIEM PARAMETRIEM ATRISINĀŠANA	8
4. PIEMĒRS	10
5. SECINĀJUMI	14
LITERATŪRA	15

SAĪSINĀJUMI

DSGE – dinamiskais stohastiskais vispārējais līdzsvars (*dynamic stochastic general equilibrium*)
GIRF – vispārīgā impulsa reakcijas funkcija (*generalised impulse response function*)
i.i.d. – neatkarīgi un vienādi sadalīti (*independent and identically distributed*)
IRF – impulsa reakcijas funkcija

KOPSAVILKUMS

DSGE modeļu atrisināšanai izmantotajā tradicionālajā perturbācijas pieejā atrisinājumu novirzes no stabila stāvokļa (kas rodas pēc tautsaimniecību skāruša šoka) dinamika ir impulsa reakcijas funkcija (IRF). Šajā pētījumā ierosināta metode IRF kā novirzes no deterministiska globāla atrisinājuma konstruēšanai. Izmantojot šo pieeju, iespējams noteikt tautsaimniecības asimetriskas reakcijas uz šokiem dažādos sākotnējos apstākļos. Piemēram, ekonomiskās lejupslīdes laikā negatīva šoka ietekme uz tautsaimniecību varētu būt daudz lielāka nekā normālos ekonomiskos apstākļos. Šī metode dod iespēju konstruēt IRF ļoti nelineāriem DSGE modeļiem.

Atslēgvārdi: DSGE, perturbācija, globāls atrisinājums, tendences inflācija

JEL kodi: C62, D58, D84

Pētījumā pausts tā autora – Latvijas Bankas Monetārās politikas pārvaldes darbinieka – viedoklis, un tas ne vienmēr atspoguļo Latvijas Bankas oficiālo nostāju. Autors uzņemas atbildību par visām pieļautajām kļūdām un neprecizitātēm. E-pasta adrese: Viktors.Ajevskis@bank.lv.

1. IEVADS

DSGE modeļu atrisināšanā visplašāk lieto perturbācijas metodes, jo tās var izmantot modeļos ar vidēju un lielu mainīgo skaitu, ātri iegūstot atrisinājumu. Pieeja balstīta uz DSGE modeļu Teilora rindas tuvinājumiem ap stabilu stāvokli, un pēdējā laikā tā plaši izstrādāta (sk., piemēram, F. Kolārs (*F. Collard*) un M. Žilārs (*M. Juillard*) (10), Dž. Gaspars (*J. Gaspar*) un K. L. Džads (*K. L. Judd*) (13), P. Goms (*P. Gomme*) un P. Kleins (*P. Klein*) (15), H. Czjiņš (*H. Jin*) un K. L. Džads (19), K. L. Džads un S. Guu (*S. Guu*) (21), Dž. Lombardo (*G. Lombardo*) (25), Dž. Lombardo un H. Ūlīgs (*H. Uhlig*) (26) un Š. Šmita-Groe (*S. Schmitt-Grohé*) un M. Uribe (*M. Uribe*) (28)). Tomēr ar šādu metožu palīdzību iegūtie atrisinājumi ir precīzi tikai nelielā stabila stāvokļa apkārtnē. Ārpus tās iegūtie atrisinājumi var būt divaini, piemēram, tiem var būt eksplozīva dinamika vai tie var būt ļoti neprecīzi (Č. Kims (*J. Kim*), S. Kims (*S. Kim*), E. Šaumburģs (*E. Schaumburg*) u.c. (23) un V. J. den Hāns (*W. J. Den Haan*) un J. de Vinds (*J. De Wind*) (11)). Turklāt tautsaimniecības reakcija uz šoku, atrodoties stabilā stāvoklī vai tālu no tā, var būt atšķirīga. Šāda situācija var rasties, ja: 1) valstī ir ārkārtīgi augsts parāda un/vai parādsaistību līmenis, 2) valsts nonākusi dziļā recesijā, 3) tā ir pārejas ekonomikas vai jaunattīstības valsts vai 4) nominālā procentu likme vai citi saistoši ierobežojumi valstī sasnieguši efektīvo zemāko robežu.

DSGE modeļu atrisināšanai globālos apgabalos izmanto globālas metodes. Atkarībā no atrisināmo modeļu veida (stohastiskie vai deterministiskie) šīs metodes ir diezgan atšķirīgas. Stohastisko modeļu atrisināšanai izmanto projekciju metodes, tomēr tām raksturīgs dimensionalitātes lāsts. Šā iemesla dēļ tās var piemērot tikai modeļu ar nelielu mainīgo skaitu atrisināšanai (K. L. Džads (20), S. B. Aruoba (*S. B. Aruoba*), H. Fernandess-Viljaverde (*J. Fernández-Villaverde*) un H. F. Rubio-Ramiress (*J. F. Rubio-Ramírez*) (5) un B. Hērs (*B. Heer*) un A. Mausners (*A. Maussner*) (17)). Savukārt deterministisku modeļu atrisināšanai lieto uz Ņūtona metodi balstītas pieejas (sk., piemēram, daudzus programmatūras *Dynare* algoritmus (S. Adžemjans (*S. Adjemian*), H. Bastani (*H. Bastani*), M. Žilārs u.c. (1)). Šajā gadījumā modeļu ar lielu mainīgo skaitu globālos atrisinājumus var iegūt samērā ātri.

Šajā pētījumā piedāvātā pieeja ietver gan stohastiskās perturbācijas metodes, gan deterministiskās Ņūtona metodes. Konkrētāk, šī pieeja nozīmē DSGE modeļa linearizāciju līdztekus zināmam globālam deterministiskam atrisinājumam. Tradicionālajā perturbācijas pieejā pēc linearizācijas ap stabilu stāvokli jāatrisina racionālo gaidu modelis ar konstantiem koeficientiem (sk. (O. Ž. Blanšārs (*O. J. Blanchard*) and Č. M. Kāns (*Ch. M. Kahn*) (9), G. Andersons (*G. Anderson*) un Dž. Mūrs (*G. Moore*) (3), H. Ūlīgs (30), P. Kleins (24) un K. A. Simss (*Ch. A. Sims*) (29)). Savukārt linearizācijas ap deterministisku atrisinājumu rezultātā tiek iegūts racionālo gaidu modelis ar deterministiskiem laikā mainīgiem koeficientiem. Šāda veida modeļu atrisināšanai šajā pētījumā izmantota atpakaļ vērsta indukcija. Tādējādi tiek iegūts laikā mainīga koeficienta slīdoša vidējā atrisinājuma atspoguļojums, kura koeficientus (tāpat kā standarta gadījumā) var uzskatīt par IRF. Izklāstītā pieeja balstīta uz V. Ajevskā (2) pētījumā izmantoto perturbāciju ap deterministisku trajektoriju. Taču V. Ajevskā (2) darbā galvenā uzmanība pievērsta politikas funkciju konstruēšanai, bet šajā pētījumā izziņātas vispārinātas impulsa reakcijas funkcijas (GRIF) globālos sākotnējos apstākļos.

Ieteiktā metode tiek piemērota G. Askari (*G. Ascari*) un A. M. Zbordones (*A. M. Sbordone*) (6) tendences inflācijas modelim. Šie autori konstatē, ka stabila

stāvokļa inflācijas vērtība būtiski ietekmē ekonomisko dinamiku. G. Askari un A. M. Zbordone (6) aplūko stabilā stāvoklī esošas tautsaimniecības reakciju uz šokiem. Turpretī šā pētījuma autors pievēršas tautsaimniecības reakcijai uz monetāru šoku, kad tā neatrodas stabilā stāvoklī. Konkrētāk, sākotnējie nosacījumi atbilst nulles nominālajai procentu likmei, t.i., $I = 0$. Šie nosacījumi neapstrīdami atšķiras no stabila stāvokļa. Savukārt G. Askari un A. M. Zbordone (6) parāda, ka jaunais Keinsa modelis ir krasi nelineārs ap nulles inflācijas stabila stāvokli. Šis novērojums dod iespēju izmantot globālu pieeju, nenovirzoties pārāk tālu no stabila stāvokļa.

Iegūtie rezultāti liecina, ka attiecībā uz inflācijas, kas nav nulle, stabila stāvokli inflācijas sākotnējā reakcija uz 0.1% negatīvas procentu likmes šoku ir ievērojami mazāka nekā ap stabila stāvokli linearizēta modeļa reakcija un trešās kārtas Teilora rindas tuvinājuma ar sākotnējo vērtību ($i = 0$) reakcija. Ja inflācijas stabila stāvoklis ir 4%, IRF pat maina tendenci, iegūstot kuprveida izliekumu.

Šis pētījums saistīts arī ar M. M. Andrēasena (*M. M. Andreassen*), H. Fernandes-Viljaverdes un H. F. Rubio-Ramiresa (4) darbu, kur atkarībā no tautsaimniecības stāvokļa konstruētas vispārinātas IRF (GIRF). Lai to izdarītu, šie autori izmanto DSGE modeļa trešās kārtas Teilora rindas tuvinājuma nopļaušanu un pēc tam veic mainīgo ceļa Montekarlo simulāciju modeļu dinamikā. Tomēr, kā jau minēts, Teilora rindas tuvinājums varētu izrādīties ļoti niecīgs, ja atrisinājums atrodas tālu no stabila stāvokļa. Turklāt Montekarlo simulācijas izmantošana ir diezgan laikietilpīga.

2. MODELIS

Šajā nodaļā vispārīgi raksturoti aplūkojamie DSGE modeļi, kā arī 3. nodaļā nepieciešamie apzīmējumi, sagatavošanas materiāls un atvasinājumi. Tiek aplūkoti DSGE modeļi, kas izteikti kā

$$E_t f(y_{t+1}, y_t, y_{t-1}, u_t) = 0 \quad (1),$$

kur E_t apzīmē nosacītu gaidu operatoru; y_t ir $n_y \times 1$ vektors, kas ietver t perioda endogēnus mainīgos; $u_t = \sigma \varepsilon_t$ ir eksogēnu i.i.d. stohastisko šoku vektors; σ ($\sigma > 0$) ir mēroga parametrs; ε_t ir papildu gadījuma mainīgais ar kovariances matricu Ω . Attēlojums f attēlo $\mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^{n_y}$ uz \mathbb{R}^{n_y} , un tas tiek uzskatīts par pietiekami līdzenu.

Ja visi šoki vienādojumā $\sigma = 0$ izzūd un (1) sistēma kļūst deterministiska

$$E_t f(y_{t+1}, y_t, y_{t-1}, 0) = 0 \quad (2),$$

deterministiskā uzdevuma atrisinājumam $y_t^{(0)}$ jāatbilst sākotnējiem nosacījumiem

$$y_0^{(0)} = y_0 \quad (3)$$

un galanosacījumiem

$$y_\infty^{(0)} = \bar{y} \quad (4).$$

Uzskatāms, ka galanosacījumi vienādojumā y_t ir deterministiskā stabilā stāvoklī, t.i., vektorus definē vienādojums $f(\bar{y}, \bar{y}, \bar{y}, 0) = 0$. Deterministiskos uzdevumus (2)–(4) var atrisināt globāli saprātīgā aprēķinu izpildes laikā, izmantojot vairākus efektīvus

algoritmus, piemēram, pagarinātās trajektorijas metodi (R. Fērs (*R. Fair*) un Dž. Teilors (*J. Taylor*) (12)) vai Ņūtona metodi (sk., piemēram, M. Žilārs (22)).

Linearizējot modeli ap iegūto deterministisko atrisinājumu, (1) vienādojums iegūst šādu formu:

$$E_t\{f_{1,t}\hat{y}_{t+1} + f_{2,t}\hat{y}_t + f_{3,t}\hat{y}_{t-1} + \sigma f_{4,t}\varepsilon_t\} = 0 \quad (5),$$

kur $\hat{y}_t = y_t - y_t^{(0)}$ ir novirze no deterministiskā atrisinājuma. Matricas

$$f_{i,t} = f_i(y_{t+1}^{(0)}, y_t^{(0)}, y_{t-1}^{(0)}, 0), i = 1, \dots, 4 \quad (6)$$

ir attēlojuma f Jakobiāna matricas attiecībā uz i -to argumentu (t.i., attiecīgi y_{t+1} , y_t , y_{t-1} un u_t) deterministiskā atrisinājuma $(y_{t+1}^{(0)}, y_t^{(0)}, y_{t-1}^{(0)}, 0)$ punktos. (5) vienādojumu var iegūt, arī paplašinot sākotnējo (1) vienādojumu nelielā parametrā σ , kā tas tiek darīts lietiskās matemātikas literatūrā (sk., piemēram, M. H. Holms (*M. H. Holmes*) (18) un A. H. Naifehs (*A. H. Nayfeh*) (27)). Tādējādi tiek iegūts laikā mainīgs racionālo gaidu modelis kā $f_{i,t}$ atkarīgs no t .

$f_{i,t}$ var attēlot (6) vienādojumā kā $f_{i,t} = \bar{f}_i + \hat{f}_{i,t}$, $i = 1, \dots, 4$, kur

$$\bar{f}_i = f_i(\bar{y}, \bar{y}, \bar{y}, 0)$$

ir attēlojuma f stabilā stāvoklī Jakobiāna matricas attiecībā uz i -to argumentu un

$$\hat{f}_{i,t} = f_{i,t}(y_{t+1}^{(0)}, y_t^{(0)}, y_{t-1}^{(0)}, 0) - f_i(\bar{y}, \bar{y}, \bar{y}, 0) \quad (7).$$

Jāņem vērā, ka, tā kā $t \rightarrow \infty$, $\hat{f}_{i,t} \rightarrow 0$, jo deterministiskam atrisinājumam jātiecas uz deterministisku stabilu stāvokli, tā kā t tiecas uz bezgalību. Tādējādi $f_{i,t}$ var uzskatīt par f_i laikā mainīgu perturbāciju.

Atkal apzīmējot \hat{y}_{t-1} kā \hat{w}_t , (5) vienādojumu var pārrakstīt kā vienādojumu sistēmu

$$\begin{aligned} \hat{w}_{t+1} &= \hat{y}_t \\ (f_1 + \hat{f}_{1,t})E_t\{\hat{y}_{t+1}\} &= -(f_2 + \hat{f}_{2,t})\hat{y}_t - (f_3 + \hat{f}_{3,t})\hat{w}_t \end{aligned} \quad (8).$$

Tiek ņemts vērā, ka $E_t\varepsilon_{t+1} = 0$.

(8) vienādojumu un (9) vienādojumu iespējams izteikt vektora formā kā

$$\Phi_t E_t \begin{bmatrix} \hat{w}_{t+1} \\ \hat{y}_{t+1} \end{bmatrix} = \Lambda_t \begin{bmatrix} \hat{w}_t \\ \hat{y}_t \end{bmatrix} \quad (9),$$

kur

$$\Phi_t = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & f_1 + \hat{f}_{1,t} \end{bmatrix}$$

un

$$\Lambda_t = \begin{bmatrix} 0 & I \\ f_3 + \hat{f}_{3,t} & f_2 + \hat{f}_{2,t} \end{bmatrix}.$$

Šeit I ir identitātes matrica. Priekšreizinojot (9) ar Φ_t^{-1} , tiek iegūts

$$E_t \begin{bmatrix} \widehat{w}_{t+1} \\ \widehat{y}_{t+1} \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} \widehat{w}_t \\ \widehat{y}_t \end{bmatrix} + M_t \begin{bmatrix} \widehat{w}_t \\ \widehat{y}_t \end{bmatrix} \quad (10).$$

Jāievēro, ka $\lim_{t \rightarrow \infty} M_t = 0$. Tāpat kā racionālo gaidu modeļu ar konstantiem parametriem gadījumā (10) vienādojumu ērti pārveidot, izmantojot L spektrālo īpašību. Proti, L matrica tiek pārveidota par bloka diagonālo vienu

$$L = ZPZ^{-1} \quad (11),$$

kur

$$P = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \quad (12),$$

kur A un B ir matricas ar īpašvērtībām, kas attiecīgi lielākas vai mazākas par vienu (modulī) un Z ir apgriežama matrica. To var paveikt, piemēram, sākotnēji pārveidojot L vienkāršā Šura formā $L = Z_1 L_1 Z_1^{-1}$, kur Z_1 ir unitāra matrica, L_1 ir augšējā trijstūra Šura matrica ar īpašvērtībām, kas izvietotas uz diagonāles (sk. Dž. H. Golubs (*G. H. Golub*) un Č. F. Van Loans (*Ch. F. Van Loan*) (14)). Pēc tam matrica L_1 tiek pārveidota par bloka diagonālo Šura faktorizāciju $L_1 = Z_2 P Z_2^{-1}$, kur Z_2 ir apgriežama matrica un P ir bloka diagonāle, un katrs diagonālais bloks ir kvazi augšējā trijstūra Šura matrica. Tādējādi Z matricai (11) vienādojumā ir forma $Z = Z_1 Z_2$. Šā pētījuma autors izmanto arī konvencionālo Blanšāra–Kāna nosacījumu (O. Ž. Blanšārs un Č. M. Kāns (9)) par nestabilas apakštelpas dimensiju, t.i., tā vienāda ar uz priekšu vērsto mainīgo skaitu.

Pēc papildu mainīgo

$$[s_t, u_t]' = Z^{-1} [\widehat{w}_t, \widehat{y}_t]' \quad (13)$$

ieviešanas un (10) priekšreizināšanas ar Z^{-1} tiek iegūts

$$E_t s_{t+1} = A s_t + Q_{11,t} s_t + Q_{12,t} u_t, \quad (14)$$

$$E_t u_{t+1} = B u_t + Q_{21,t} s_t + Q_{22,t} u_t, \quad (15),$$

kur

$$\begin{bmatrix} Q_{11,t} & Q_{12,t} \\ Q_{21,t} & Q_{22,t} \end{bmatrix} = Z^{-1} M_t Z \quad (16).$$

Sistēma (14)–(15) ir lineārs racionālo gaidu modelis ar laikā mainīgiem parametriem. Z matricu (11) var izvēlēties tā, lai

$$\|A\| < \alpha + \gamma < 1 \text{ and } \|B^{-1}\| < \beta + \gamma < 1 \quad (17),$$

kur α un β ir attiecīgi A un B^{-1} matricu lielākās īpašvērtības (modulī) un γ ir pēc izvēles mazs (sk. F. Hartmanis (*Ph. Hartman*) (16)). Jāievēro arī, ka $\|B\|^{-1} < 1$ pietiekami mazam γ .

Ja

$$B_t = B + Q_{22,t}, \quad A_t = A + Q_{11,t} \quad (18),$$

tad (14)–(15) iespējams izteikt vektora formā kā

$$E_t s_{t+1} = A_t s_t + Q_{12,t} u_t \quad (19),$$

$$E_t u_{t+1} = B_t u_t + Q_{21,t} s_t \quad (20).$$

Tiek pieņemts, ka $T + 1 > 0$ ir pēdējais brīdis, kas garantē nepieciešamo deterministiskā uzdevuma (2) atrisinājuma $(x_t^{(0)}, y_t^{(0)})$ un $t = 0, \dots, T + 1$ precizitāti.

3. RACIONĀLO GAIDU MODEĻA AR LAIKĀ MAINĪGIEM PARAMETRIEM ATRISINĀŠANA

No (20) vienādojuma T laikam tiek iegūts

$$u_T = -B_T^{-1} Q_{21,T} s_T + B_T^{-1} E_T u_{T+1}.$$

Tagad tiek pieņemts, ka līdz $T + 1$ laikam lineārā racionālo gaidu modeļa ar laika mainīgiem parametriem (19)–(20) atrisinājums tuvojas nullei, t.i., $E_T u_{T+1} = 0$. Apzīmējot $K_{T,T} = B_T^{-1} Q_{21,T}$, tiek iegūts

$$u_T = -K_{T,T} s_T \quad (21).$$

$T - 1$ vienādojumam iegūst

$$u_{T-1} = -B_{T-1}^{-1} Q_{21,T-1} s_{T-1} + B_{T-1}^{-1} E_{T-1} u_T \quad (22).$$

Paņemot nosacītas gaidas no (21) vienādojuma abām pusēm $T - 1$ laikā un ievietojot $E_{T-1} s_T$ no (19) vienādojuma, tiek iegūts

$$E_{T-1} u_T = -K_{T,T} (A_{T-1} s_{T-1} + Q_{12,T-1} u_{T-1}) \quad (23).$$

Ievietojot (23) vienādojumu (22) vienādojumā, iegūst

$$u_{T-1} = -B_{T-1}^{-1} Q_{21,T-1} s_{T-1} + B_{T-1}^{-1} [-K_{T,T} (A_{T-1} s_{T-1} + Q_{12,T-1} u_{T-1})].$$

Pārkārtojot locekļus, iegūst

$$(I + B_{T-1}^{-1} K_{T,T} Q_{12,T-1}) u_{T-1} = -B_{T-1}^{-1} (Q_{21,T-1} + K_{T,T} A_{T-1}) s_{T-1} \quad (24).$$

Reizinot (24) ar $(I + B_{T-1}^{-1} K_{T,T} Q_{12,T-1})^{-1}$, iegūst

$$u_{T-1} = -(I + B_{T-1}^{-1} K_{T,T} Q_{12,T-1})^{-1} B_{T-1}^{-1} (Q_{21,T-1} + K_{T,T} A_{T-1}) s_{T-1}.$$

Apzīmējot $L_{T,T-1} = (B_{T-1} + K_{T,T} Q_{12,T-1})$, tiek iegūts

$$u_{T-1} = -L_{T,T-1}^{-1} (Q_{21,T-1} + B_{T-1}^{-1} K_{T,T} A_{T-1}) s_{T-1}.$$

Apzīmējot

$$K_{T,T-1} = L_{T,T-1}^{-1} (Q_{21,T-1} + B_{T-1}^{-1} K_{T,T} A_{T-1})$$

un

$$R_{T-1} = L_{T,T-1}^{-1} (\Pi_{2,T-1} + K_{T,T} \Pi_{1,T-1} + R_T \Lambda),$$

tiek iegūts

$$u_{T-1} = -K_{T,T-1} s_{T-1}.$$

Tālāk, izmantojot atpakaļvērstu rekursiju, katram $t = 0, 1, 2, \dots, T + 1$ iegūst ierobežota horizonta atrisinājumus

$$u_t = -K_{T,t} s_t \quad (25),$$

kur $K_{T,t}$ var aprēķināt, izmantojot atpakaļvērstu rekursiju

$$K_{T,t} = L_{T,t}^{-1}(Q_{21,t} + B_t^{-1}K_{T,t+1}A_t).$$

Ievietojot (25) vienādojumu (14) vienādojumā, iegūst

$$E_t s_{t+1} = A s_t + (Q_{11,t+1} - Q_{12,t+1}K_{T,t})s_t.$$

Apzīmējot $A_t = A_{t+1} + Q_{11,t+1} - Q_{12,t+1}K_{T,t}$, tiek iegūts

$$E_t s_{t+1} = A_t s_t \quad (26).$$

Var skaidri redzēt, ka

$$\begin{bmatrix} s_{t+1} \\ u_{t+1} \end{bmatrix} - E_t \begin{bmatrix} s_{t+1} \\ u_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{R}_{1,t} \\ \mathbb{R}_{2,t} \end{bmatrix} \varepsilon_{t+1} = Z\Phi_t^{-1}f_{4,t}\sigma\varepsilon_{t+1}.$$

No (26) izriet, ka

$$(E_t s_{t+1} - s_{t+1}) + s_{t+1} = A_t s_t.$$

Tādējādi iegūst šādu izteiksmi:

$$s_{t+1} = A_t s_t + \mathbb{R}_{1,t} \varepsilon_{t+1} \quad (27).$$

Pieņemot, ka $s_0 = 0$, attiecībā uz $t = 1$, no (27) vienādojuma iegūst

$$s_1 = \mathbb{R}_{1,0} \varepsilon_1;$$

attiecībā uz $t = 2$

$$s_2 = A_1 \mathbb{R}_{1,0} \varepsilon_1 + \mathbb{R}_{1,1} \varepsilon_2.$$

Šādā veidā turpinot procesu, tiek iegūts s_t slīdoša vidējā atrisinājuma atspoguļojums:

$$s_t = \gamma_{t,t} \varepsilon_t + \gamma_{t,t-1} \varepsilon_{t-1} + \dots + \gamma_{t,2} \varepsilon_2 + \gamma_{t,1} \varepsilon_1, \quad (28),$$

kur koeficientus $\gamma_{t,t-i}$ var iegūt, izmantojot uz priekšu vērstu rekursiju

$$\gamma_{t,t} = \mathbb{R}_{1,t-1},$$

$$\gamma_{t,t-1} = A_{t-1} \gamma_{t-1,t-1}$$

...

$$\gamma_{t,t-i} = A_{t-1} \gamma_{t-1,t-i}$$

...

$$\gamma_{t,1} = A_{t-1} \gamma_{t-1,1}$$

Mainīgajam u_t arī tiek iegūts slīdoša vidējā atrisinājuma atspoguļojums. Ievietojot (28) vienādojumu (25) vienādojumā, iegūst

$$u_t = -K_{T,t}(\gamma_{t,t} \varepsilon_t + \dots + \gamma_{t,1} \varepsilon_1) \quad (29)$$

vai īsāk

$$u_t = \delta_{t,t}\varepsilon_t + \delta_{t,t-1}\varepsilon_{t-1} + \dots + \delta_{t,2}\varepsilon_2 + \delta_{t,1}\varepsilon_1 \quad (30),$$

kur $\delta_{t,i} = -K_{T,t}\gamma_{t,i}$. Ņemot vērā, ka $\hat{x}_t = Z_{11}s_t + Z_{12}u_t$ un $\hat{y}_t = Z_{21}s_t + Z_{22}u_t$, tiek iegūts sākotnējo mainīgo slīdoša vidēja atrisinājuma atspoguļojums.

$$\hat{x}_t = \rho_{t,t}^x\varepsilon_t + \rho_{t,t-1}^x\varepsilon_{t-1} + \dots + \rho_{t,2}^x\varepsilon_2 + \rho_{t,1}^x\varepsilon_1,$$

$$\hat{y}_t = \rho_{t,t}^y\varepsilon_t + \rho_{t,t-1}^y\varepsilon_{t-1} + \dots + \rho_{t,2}^y\varepsilon_2 + \rho_{t,1}^y\varepsilon_1,$$

$$\text{kur } \rho_{t,i}^x = Z_{11}\gamma_{t,i} + Z_{12}\delta_{t,i} \text{ un } \rho_{t,i}^y = Z_{21}\gamma_{t,i} + Z_{22}\delta_{t,i}.$$

4. PIEMĒRS

Lai ilustrētu, kā aplūkotā metode darbojas, šā pētījuma autors to piemēro tendences inflācijas DSGE modelim saskaņā ar G. Askari un A. M. Zbordoni (6), kuri parāda, cik svarīgi ņemt vērā inflācijas, kas nav nulle, stabilo stāvokli attiecībā uz modeļa tautsaimniecības dinamiskajām īpašībām. Šajā modelī reprezentatīvais aģents maksimizē starplaiku derīguma funkciju

$$\max_{(C_t, N_t)} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - d_n e^{\zeta} \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \quad (31),$$

kas pakļauta

$$P_t C_t + (1 + i_t)^{-1} B_t = W_t N_t - T_t + D_t + B_{t-1} \quad (32),$$

kur c_t ir patēriņš, N_t – darbaspēka ieguldījums, i_t – nominālā procentu likme, B_t – viena perioda obligāciju turējumi, W_t – nominālā algas likme, T_t – vienreizēji nodokļi, D_t – peļņas ienākumi, ζ_t – darbaspēka piedāvājuma šoks, β – diskonta faktors un E_0 – nosacītu gaidu operators.

Galapreču ražotāji izmanto šādu paņēmieni:

$$Y_t = \left[\int_0^1 Y_{i,t}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \quad (33).$$

Viņu pieprasījums starppatēriņa preču ražotājiem ir

$$Y_{i,t} = \left(\frac{P_{i,t}}{P_{t+j}} \right) Y_{t+j} \quad (34).$$

Starppatēriņa preču ražotāju ražošanas funkcija:

$$Y_{i,t} = A_t N_{i,t}^{1-\alpha} \quad (35).$$

A_t ir eksogēns tehnoloģijas līmeņa stacionārs process. i uzņēmuma darbaspēka pieprasījums un faktiskās robežizmaksas ir šādas:

$$N_{i,t}^d = \left(\frac{Y_{i,t}}{A_t} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (36),$$

$$MC_t = \frac{W_t}{P_t} \frac{1}{1-\alpha} A_t^{\frac{1}{\alpha-1}} Y_{i,t}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (37).$$

Modeli raksturo šādi vienādojumi:

$$\frac{1}{Y_t^\sigma} = \beta E_t \frac{(1+i_t)}{\pi_{t+1} Y_{t+1}^\sigma} \quad (38),$$

$$W_t = Y_t^\sigma d_n e^{\zeta_t} N_t^\varphi \quad (39),$$

$$p_t^* = \left(\frac{1 - \theta \pi_{t-1}^{(1-\varepsilon)\rho} \pi_t^{\varepsilon-1}}{1-\theta} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \quad (40),$$

$$(p_t^*)^{1+\frac{\varepsilon\alpha}{1-\alpha}} = \frac{\varepsilon}{(\varepsilon-1)(1-\alpha)} \frac{\psi_t}{\phi_t} \quad (41),$$

$$\psi_t = W_t A_t^{\frac{(-1)}{1-\alpha}} Y_t^{\frac{1}{1-\alpha}-\sigma} + \beta \theta \pi_t^{\frac{\varepsilon(-\rho)}{1-\alpha}} \pi_{t+1}^{\frac{\varepsilon}{1-\alpha}} \psi_{t+1} \quad (42),$$

$$\phi_t = Y_t^{1-\sigma} + \beta \theta \pi_t^{(1-\varepsilon)\rho} \pi_{t+1}^{\varepsilon-1} \phi_{t+1} \quad (43),$$

$$N_t = s_t \left(\frac{Y_t}{A_t} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (44),$$

$$s_t = (1-\theta) (p_t^*)^{\frac{(-\varepsilon)}{1-\alpha}} + \theta (\pi_{t-1})^{\frac{\rho(-\varepsilon)}{1-\alpha}} (\pi_t)^{\frac{\varepsilon}{1-\alpha}} s_{t-1} \quad (45),$$

$$\frac{1+i_t}{1+\bar{i}} = \left(\frac{1+i_{t-1}}{1+\bar{i}} \right)^{\rho_i} \left(\left(\frac{\pi_t}{\bar{\pi}} \right)^{\phi_\pi} \left(\frac{Y_t}{\bar{Y}} \right)^{\phi_y} \right)^{1-\rho_i} e^{v_t} \quad (46),$$

$$MC_t = w_t \frac{1}{1-\alpha} (A_t)^{\frac{1}{\alpha-1}} (y_t)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (47),$$

$$(r_t) = \frac{1+(i_t)}{(\pi_{t+1})} \quad (48),$$

$$U_t = y_t - \frac{d_n (\zeta_t) (N_t)^{1+\varphi}}{1+\varphi} + \beta U_{t+1} \quad (49),$$

$$v_t = \rho_v v_{t-1} + \varepsilon_{v_t} \quad (50),$$

$$A_t = \rho_a A_{t-1} + \varepsilon_{A_t} \quad (51),$$

$$\zeta_t = \rho_\zeta \zeta_{t-1} + \varepsilon_{\zeta_t} \quad (52),$$

$$(\tilde{A}_t) = \frac{(A_t)}{(s_t)} \quad (53).$$

Parametri kalibrēti saskaņā ar G. Askari un A. M. Zbordoni (6): $\sigma = 1$, $\phi = 1$ un 3 , $\varepsilon = 10$, $\phi_\pi = 2$, $\phi_y = 0.5/4$, $\beta = 0.99$, $\theta = 0.75$ un $\rho_i = 0.8$. Kalibrētie parametri atspoguļoti 1. tabulā.

1. tabula

Kalibrētie parametri

σ	ϕ	ε	ϕ_π	ϕ_y	β	θ	ρ_i
1	2	10	2	0.125	0.99	0.75	0.8

Deterministiskais atrisinājums iegūts tautsaimniecībai ar sākotnējo punktu, ja nominālā procentu likme $i_0 = 0$ (visi pārējie stāvokļa mainīgie atrodas stabilā stāvoklī). Šis ekonomiskais nosacījums atbilst esošajai situācijai attīstītajās valstīs. Šā pētījuma autors nemodelē īstermiņa procentu likmes zemāko efektīvo robežu, pieņemot, ka šī robeža atrodas pietiekami zemu zem nulles.

Tiek aplūkota inflācijas IRF reakcija uz negatīvu 0.1% procentu likmju šoku attiecībā uz inflācijas stabila stāvokļa trijām vērtībām: 0%, 2% un 4%. 4% stabila stāvokļa likmes izvēle saistīta ar nesenajām diskusijām par dažu pētnieku (O. Ž. Blanšārs, Dž. Dell'Ariča (*G. Dell'Ariceia*) un P. Mauro (*P. Mauro*) (8), Dž. Viljamss (*J. C. Williams*) (31) un L. Bols (*L. M. Ball*) (7)) priekšlikumu pieņemt 4% inflācijas mērķi Amerikas Savienotajās Valstīs nolūkā mazināt nulles robežas ierobežojumu.¹ Jāņem vērā, ka DSGE modelēšanā ierasta prakse monetārās analīzes veikšanai ir inflācijas stabila stāvokļa vērtības (0%) noteikšana. Tiek salīdzinātas IRF, kas iegūtas, izmantojot trīs metodes: a) linearizāciju ap stabilu stāvokli, b) trešās kārtas Teilora rindas tuvinājumu ap deterministisku stabilu stāvokli un c) no stāvokļa atkarīgas globālās GIRF. Trešās kārtas Teilora rindas gadījumā GIRF tuvināšana konstruēta kā starpība starp šokētiem un nešokētiem atrisinājumiem, kuriem ir vienādi nominālajai procentu likmei $i_0 = 0$ atbilstoši sākotnējie nosacījumi. Šajā nolūkā tiek izmantota programmatūras *Dynare* komanda *simult_*, kas dod iespēju konstruēt, sākot no konkrēta punkta, Teilora rindas aptuvenu atrisinājumu, kas šokēts ar noteiktām inovācijām.

1.–3. attēlā atspoguļota inflācijas IRF reakcija uz negatīvu 0.1% procentu likmju šoku gadījumos, kad stabila stāvokļa inflācija ir atšķirīga un Friša elastība φ ir 1 (kreisā puse) un 3 (labā puse). Visos inflācijas stabilos stāvokļos inflācijas reakcija uz procentu likmes šoku linearizācijas ap deterministisku atrisinājumu gadījumā ir ievērojami mazāka nekā linearizācijas un trešās kārtas Teilora rindas tuvinājuma ap stabilu stāvokli gadījumā. Šī atšķirība palielinās līdz ar stabila stāvokļa inflācijas kāpumu. Relatīvās atšķirības starp modeļa, kas linearizēts ap stabilu stāvokli, un modeļa, kas linearizēts ap deterministisku atrisinājumu, šokiem, ja $t = 1$ un $\varphi = 1$, ir 34%, 57% un 84%, ja stabila inflācija ir attiecīgi 0%, 2% un 4%. Savukārt, ja $\varphi = 3$, šie skaitļi ir attiecīgi 45%, 93% un 171%. Relatīvās atšķirības starp linearizēšanas ap deterministisku atrisinājumu un trešās kārtas Teilora rindas tuvinājuma ap stabilu stāvokli šokiem (ja $t = 1$ un $\varphi = 1$) ir 23%, 36% un 46%, ja stabila inflācija ir attiecīgi 0%, 2% un 4%. Savukārt, ja $\varphi = 3$, šie skaitļi ir attiecīgi 36%, 67% un 91%. Ja stabila stāvokļa inflācija ir 4%, atšķirība abu φ vērtību gadījumā ir diezgan liela. Savukārt augstāka Friša elastības vērtība nozīmē būtiskāku šoku relatīvo atšķirību, ko rada lielāka modeļu nelinearitāte.

Friša elastības koeficientam palielinoties, IRF kļūst arī noturīgāka. Ja $\varphi = 3$ un stabila stāvokļa inflācija ir 4%, ap deterministisku atrisinājumu linearizēta modeļa gadījumā mainās pat IRF tendence. Tā iegūst kuprveida izliekumu, savukārt, veicot perturbācijas ap stabilu stāvokli, tā joprojām monotoni samazinās. Ja stabila stāvokļa inflācija ir 0% un 2%, pirmās un trešās kārtas tuvinājumu starpība ir samērā neliela.

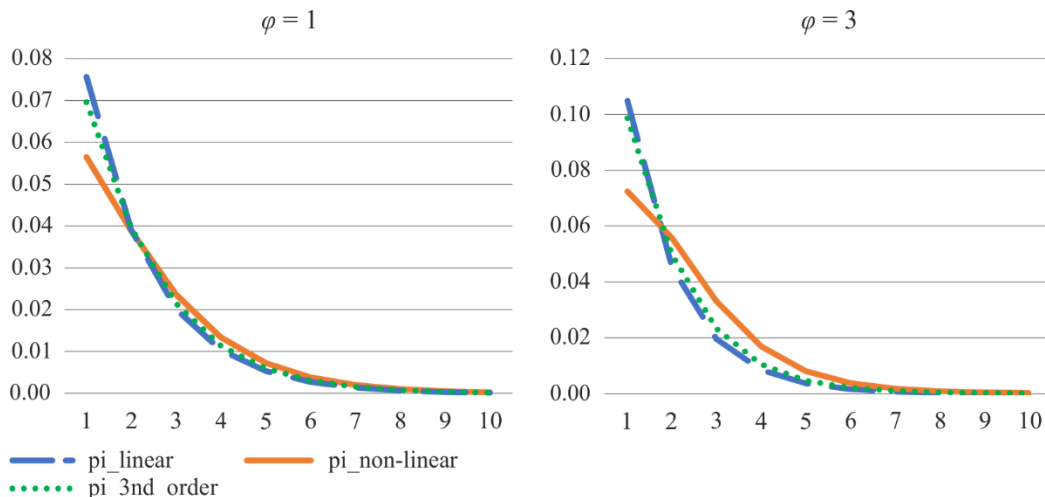
G. Askari un A. M. Zbordone (6) parāda, ka, izlīdzinot Filipsa līkni ar augstāku stabila stāvokļa inflāciju $t = 1$ laikā, inflācijas jutīgums pret procentu likmju šoku samazinās. Pētījumā iegūtie rezultāti liecina, ka šis novērojums ir spēcīgāks, ja par sākotnēju nosacījumu netiek izvēlēts stabils stāvoklis. Tāpēc perturbācijas ap deterministisku atrisinājumu gadījumā inflācija ir mazāk jutīga pret procentu likmju šoku nekā perturbācijas ap stabilu stāvokli gadījumā $t = 1$ laikā, ja

¹ Tās pašas inflācijas stabila stāvokļa vērtības izmantotas G. Askari un A. M. Zbordones (6) pētījumā.

tautsaimniecībā saglabājas 0% īstermiņa procentu likme, pat neņemot vērā nominālās procentu likmes zemākās robežas ietekmi.

1. attēls

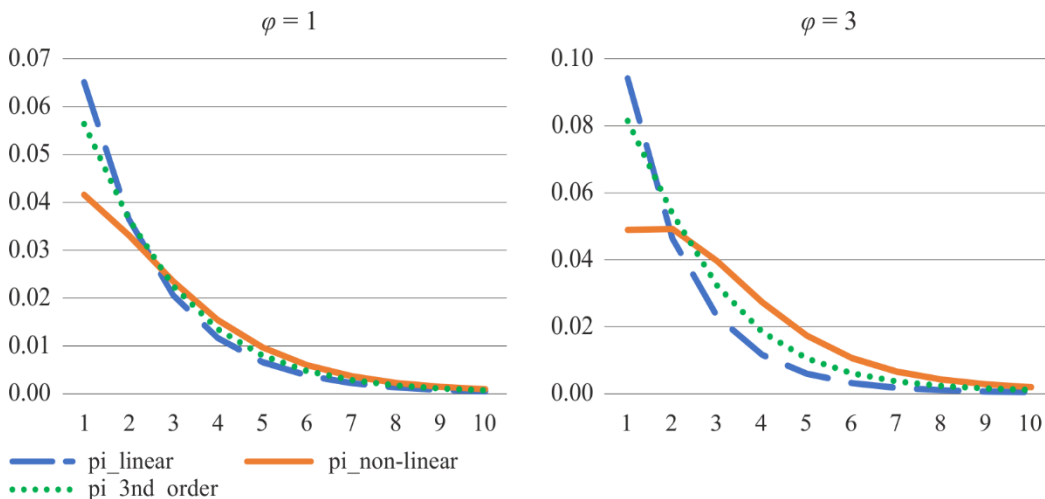
Stabila inflācija 0%



Piezīmes. Inflācijas IRF reakcija uz negatīvu 0.1% procentu likmju šoku, ja stabila stāvokļa inflācija ir 0% un Friša elastība ir $\varphi = 1$ (kreisā puse) un 3 (labā puse). Pārtrauktā zilā līnija attēlo ap stabilu stāvokli linearizēta modeļa IRF, bet nepārtrauktā oranžā līnija apzīmē ap deterministisku atrisinājumu linearizēta modeļa IRF.

2. attēls

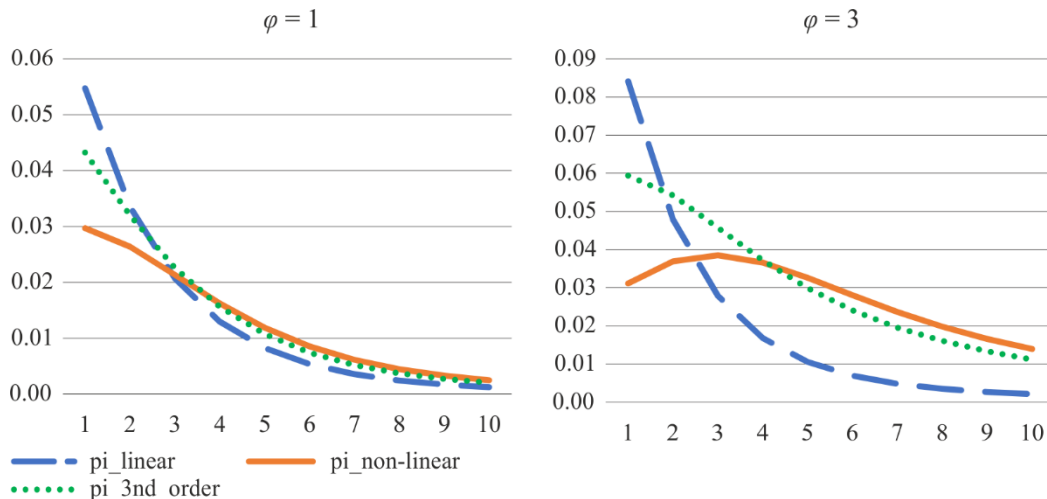
Stabila inflācija 2%



Piezīmes. Inflācijas IRF reakcija uz negatīvu 0.1% procentu likmju šoku, ja stabila stāvokļa inflācija ir 2% un Friša elastība ir $\varphi = 1$ (kreisā puse) un 3 (labā puse). Pārtrauktā zilā līnija attēlo ap stabilu stāvokli linearizēta modeļa IRF, bet nepārtrauktā oranžā līnija apzīmē ap deterministisku atrisinājumu linearizēta modeļa IRF.

3. attēls

Stabila inflācija 4%



Piezīmes. Inflācijas IRF reakcija uz negatīvu 0.1% procentu likmju šoku, ja stabila stāvokļa inflācija ir 4% un Friša elastība ir $\varphi = 1$ (kreisā puse) un 3 (labā puse). Pārtrauktā zilā līnija attēlo ap stabilu stāvokli linearizēta modeļa IRF, nepārtrauktā oranžā līnija apzīmē ap deterministisku atrisinājumu linearizēta modeļa IRF.

5. SECINĀJUMI

Šajā pētījumā piedāvātā pieeja DSGE modeļu GIRF konstruēšanai balstīta uz perturbāciju ap deterministisku trajektoriju. Šī pieeja dod iespēju rīkoties ar ļoti nelineāriem modeļiem un risināt situācijas, kurās sākotnējie nosacījumi ir ļoti tālu no stabilā stāvokļa. Pieņemot, ka modeļa deterministiskais atrisinājums jau rasts, šī metode samazina lineāra racionālo gaidu modeļa ar deterministiskiem laikā mainīgiem parametriem rekursīvas atrisināšanas problēmu. Šī pieeja izmantota DSGE modelim ar inflācijas tendenci un procentu likmes sākotnējo vērtību 0%. Iegūtie rezultāti liecina, ka impulsa reakcijas funkcijas atšķirība ir ievērojama, ja tiek ņemta vērā sākotnējā tautsaimniecības vērtība. Modeļa ietvars ir diezgan piemērots novērtējumu veikšanai, izmantojot Kalmana filtru ar deterministiskiem laikā mainīgiem koeficientiem.

LITERATŪRA

1. ADJEMIAN, Stéphane, BASTANI, Houtan, JUILLARD, Michel, KARAMÉ, Frédéric, MAIH, Junior, MIHOUBI, Ferhat, PERENDIA, George, PFEIFER, Johannes, RATTO, Marco, VILLEMOT, Sébastien. *Dynare: Reference Manual Version 4*. Dynare Working Paper, No. 1, 2011, CEPREMAP (revised July 2018). 202 p.
2. AJEVSKIS, Viktors. Semi-global Solutions to DSGE models: Perturbation around a Deterministic Path. *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, vol. 21, issue 2, April 2017, pp. 1–28.
3. ANDERSON, Gary, MOORE, George. A Linear Algebraic Procedure for Solving Linear Perfect Foresight Models. *Economics Letters*, vol. 17, issue 3, 1985, pp. 247–252.
4. ANDREASEN, Martin Møller, FERNÁNDEZ-VILLAVÉRDE, Jesús, RUBIO-RAMÍREZ, Juan Francisco. *The Pruned State-Space System for Non-Linear DSGE Models: Theory and Empirical Applications*. NBER Working Paper, No. 18983, 2013. 49 p.
5. ARUOBA, S. Boragan, FERNÁNDEZ-VILLAVÉRDE, Jesús, RUBIO-RAMÍREZ, Juan Francisco. Comparing Solution Methods for Dynamic Equilibrium Economies. *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 30, issue 12, December 2006, pp. 2477–2508.
6. ASCARI, Guido, SBORDONE, Argia M. The Macroeconomics of Trend Inflation. *Journal of Economic Literature*, vol. 52, issue 3, 2014, pp. 679–739.
7. BALL, Laurence M. The Case for Four Percent Inflation. *Central Bank Review*, vol. 13, issue 2, May 2013, pp. 17–31.
8. BLANCHARD, Oliver J., DELL'ARICCIA, Giovanni, MAURO, Paolo. Rethinking Macroeconomic Policy. *Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 42, issue s1, August 2010, pp. 199–215.
9. BLANCHARD, Oliver J., KAHN, Charles Milton. The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations. *Econometrica*, vol. 48, issue 5, July 1980, pp. 1305–1311.
10. COLLARD, Fabrice, JUILLARD, Michel. Accuracy of Stochastic Perturbation Methods: The Case of Asset Pricing Models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 25, issue 6–7, June 2001, pp. 979–999.
11. DEN HAAN, Wouter J., DE WIND, Joris. Nonlinear and Stable Perturbation-based Approximations. *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 36, issue 10, 2012, pp. 1477–1497.
12. FAIR, Ray, TAYLOR, John. Solution and Maximum Likelihood Estimation of Dynamic Nonlinear Rational Expectations Models. *Econometrica*, vol. 51, issue 4, 1983, pp. 1169–1185.
13. GASPAR, Jess, JUDD, Kenneth Lewis. Solving Large-Scale Rational-Expectations Models. *Macroeconomic Dynamics*, vol. 1, issue 01, January 1997, pp. 45–75.

14. GOLUB, Gene H., VAN LOAN, Charles F. *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, 3rd ed., 15 October 1996. 728 p.
15. GOMME, Paul, KLEIN, Paul. Second-Order Approximation of Dynamic Models without the Use of Tensors. *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 35, issue 4, 2011, pp. 604–615.
16. HARTMANN, Philip. *Ordinary Differential Equations*. 2nd ed. Birkhauser, Boston, 1982. 612 p.
17. HEER, Burkhard, MAUSSNER, Alfred. Computation of Business Cycle Models: A Comparison of Numerical Methods. *Macroeconomic Dynamics*, vol. 12, issue 5, November 2008, pp. 641–663.
18. HOLMES, Mark Hayden (2013). *Introduction to Perturbation Methods*. 3rd ed. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York-Tokyo. 438 p.
19. JIN, He-hui, JUDD, Kenneth Lewis. *Perturbation Methods for General Dynamic Stochastic Models*. Department of Economics, Hoover Institution, Stanford University, Discussion Paper, April 2002. 44 p.
20. JUDD, Kenneth Lewis. *Numerical Methods in Economics*. The MIT Press, Cambridge, 1998. 656 p.
21. JUDD, Kenneth Lewis, GUU, Sy-Ming. Asymptotic Methods for Aggregate Growth Models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 21, issue 6, June 1997, pp. 1025–1042.
22. JUILLARD, Michel. *DYNARE: A Program for the Resolution and Simulation of Dynamic Models with Forward Variables through the Use of a Relaxation Algorithm*. CEPREMAP Working Paper (Couverture Orange), No. 9602, 1996. 13 p.
23. KIM, Jinill, KIM, Sunghyun, SCHAUMBURG, Ernst, SIMS, Christopher Albert. Calculating and Using Second-Order Accurate Solutions of Discrete Time Dynamic Equilibrium Models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 32, issue 11, November 2008, pp. 3397–3414.
24. KLEIN, Paul. Using the Generalized Schur Form to Solve a Multivariate Linear Rational Expectations Model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 24, 2000, pp. 1405–1423.
25. LOMBARDO, Giovanni. *On Approximating DSGE Models by Series Expansions*. ECB Working Paper, No. 1264, November 2010. 31 p.
26. LOMBARDO, Giovanni, UHLIG, Harald. *A Theory of Pruning*. ECB Working Paper, No. 1696, July 2014. 23 p.
27. NAYFEH, Ali Hasan. *Perturbation Methods*. John Wiley & Sons Ltd, New York, June 1973. 448 p.
28. SCHMITT-GROHÉ, Stephanie, URIBE, Martín. Solving Dynamic General Equilibrium Models Using as Second-order Approximation to the Policy Function. *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 28, 2004, pp. 755–775.
29. SIMS, Christopher Albert. Solving Linear Rational Expectations Models. *Computational Economics*, vol. 20, issue 1–2, October 2002, pp. 1–20.

30. UHLIG, Harald. A Toolkit for Analysing Nonlinear Dynamic Stochastic Models Easily. *No: Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*. Ed. by R. Marimon, A. Scott. Oxford University Press, 1999, pp. 30–61.
31. WILLIAMS, John C. Heeding Daedalus: Optimal Inflation and the Zero Lower Bound. *Brookings Papers on Economic Activity*, vol. 40, issue 2 (Fall), 2009, pp. 1–37.